



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. α. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ ,

να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^v, v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει:

$$f'(x) = vx^{v-1}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

B. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 . Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ):

α. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των z_1 και z_2 είναι το άθροισμα των διανυσματικών τους ακτίνων.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

β. Είναι: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

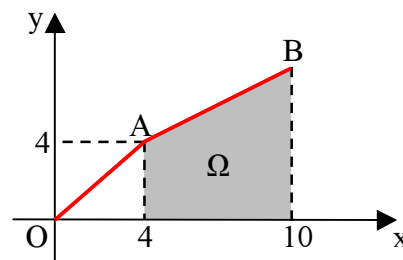
γ. Είναι: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

δ. Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ με $z_1 \neq z_2$ παριστάνει τη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

- Γ. Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος που η γραφική της παράσταση αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα OA και AB . Το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου Ω είναι $E(\Omega) = 36$ τ.μ. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:



α. $F(0) =$ β. $F(4) =$ γ. $F(10) =$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + \lambda, & \text{αν } x > 0 \\ (\mu - 1)x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- α. Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η f να είναι συνεχής.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

- β. Να βρείτε την τιμή του μ , ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

- γ. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

- δ. Για $\lambda = 1$ και $\mu = 2$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{\pi} f(x) dx$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{1-e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. i. Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

- ii. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = (e^x - 1) \cdot e^{1+e^x - e^x}$, να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

- β. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

- γ. Να παραστήσετε γραφικά την f .

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

- δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της $f'(x)$, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = \ln \frac{1}{2}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΘΕΜΑ 4^ο

Οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύουν:

$$\int_1^x f(t) dt - 2 = x \int_0^x g(t) dt \quad (1) \quad \text{και} \quad g(x) \neq 0 \quad (2)$$

Να αποδείξετε ότι:

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = 2g(0)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β. $g(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

γ. $\int_1^x f(t) dt \leq \int_1^0 f(t) dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

δ. Η εξίσωση $f(x) = 2g(x) + 2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7